屯門天主教中學

2013 年 12 月 6 日

目錄

編者的話

班上的同學們經常說學習數學很困難，對著長長的代數公式、抽象的立體圖形根本一頭霧水，百思不得其解。漸漸地，他們對學習數學失去興趣，甚至討厭數學。但其實學習數學並不是一件難事，只要我們能夠在解題中發掘到數學的趣味及享受成功解題帶來的滿足感，大家就會發現數學根本並不可怕，甚至會被數學的魅力吸引著。

那麼，我先問大家三個問題：只用圓規及沒有刻度的直尺能畫出各種幾何圖形嗎？只用剪刀，如何剪出各種正多邊形呢？如何在摺紙後只剪一刀就剪出特定的圖形呢？

在這一期《數味軒》當中，我們將會探討以上一系列的圖形問題，包括尺規作圖、摺紙問題及「一刀剪」；我們更設有挑戰站及做做看環節，讓同學們可以一同參與其中，一同感受數學的魅力，希望同學們可以從這本《數味軒》發現數學並不困難，並發掘出數學的趣味。

最後，這本《數味軒》能順利完成，有賴各位工作人員的合作及努力。同時我亦藉這機會感謝多位顧問老師給予我們很多寶貴的意見，協助我們修訂這特刊。

6B 梁起賢

2012-2013 年度數學學會主席

尺規作圖

簡介

尺規作圖是一個源於希臘的古老數學課題，指只利用一個圓規和一把直尺來畫出不同的平面幾何圖案。在尺規作圖中所使用的圓規和直尺都不能有刻度。


工具

1) 圓規: 可以開至任意闊。利用圓規可以畫出任意一條弧線，並可以利用兩條弧線相交而形成一點。
2) 直尺: 可以畫出無限長的線。無刻度的直尺只可作連線之用，並只可以利用其中一邊，換言之，不可用直尺來畫平行線。利用直尺可以將兩點相連作一直線及將兩線相交成一點。

<u>作圖法則</u>

用尺規作圖時必須要遵守以下作圖公法:

1) 通過兩個已知點可連作一直線。

2) 已知圓心和半徑可作一個圓。

3) 若兩已知直線相交，可求其交點。

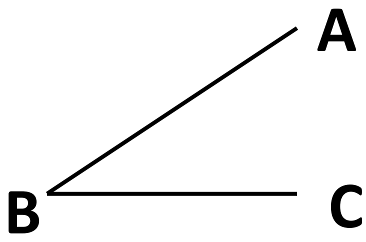
4) 若一已知直線和一已知圓相交，可求其交點。

5) 若兩已知圓相交，可求其交點。

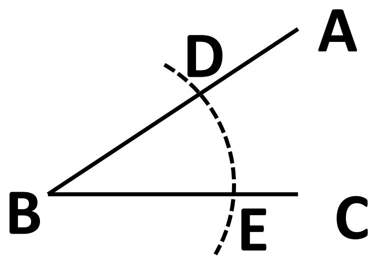
基本作圖技巧

按照上頁的作圖公法可以得出一些作圖的基本技巧，以下例子為一些作圖的技巧及其證明，包括角平分線、垂直平分線和 60°角。

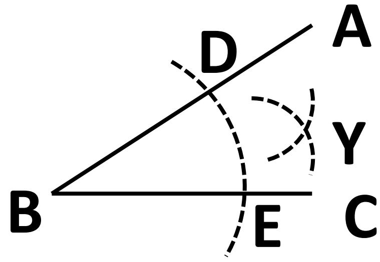
角平分線



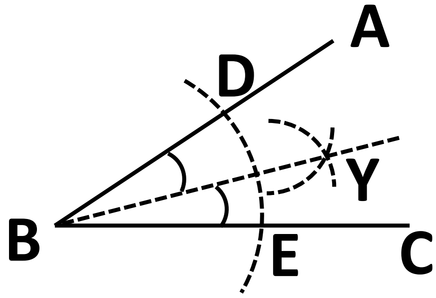
給定任意角∠ABC。



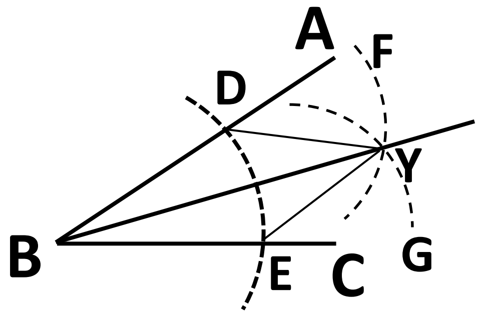
以點 B 為圓心，作弧與 BA 及 BC 相交於點 D 和點 E。



分別以點 D 和點 E 為圓心，大於 DE 的一半長度為半徑作弧，兩弧相交於點 Y。



最後，用直尺連接點 Y 及點 B，線 BY 是∠ABC 的角平分線。



證明

DY 是弧 FY 的半徑而 EY 是弧 YG 的半徑

∵兩弧半徑相等

∴DY = EY

∵BE 和 BD 是弧 DE 的半徑

∴BE = BD

在△BDY 及△BEY 中，

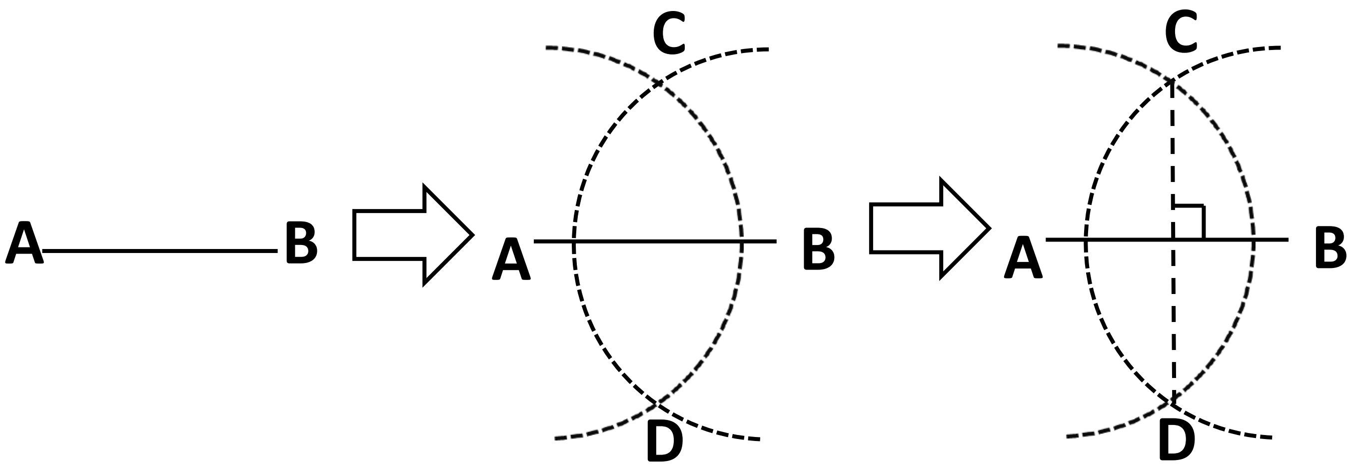
DY = EY
BD = BE
BY = BY

∴△BDY 及△BEY 是全等三角形 (S.S.S.)

∴∠DBY =∠EBY (全等三角形對應角)

∴BY 是∠ABC 的角平分線。

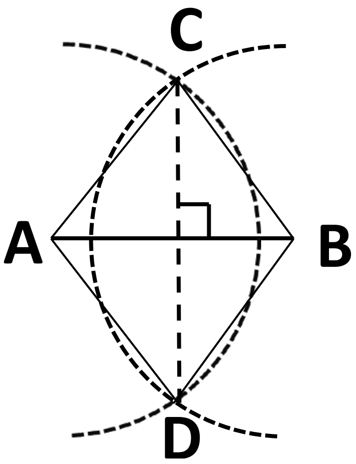
垂直平分線



給定一線段 AB。

分別以點 A 和點 B 作為圓心，用圓規畫出大於 AB 一半長度為半徑的弧。兩弧相交於 C 和 D 兩點。

最後，用直尺連接點 C 及點 D。線 CD 是 AB 的垂直平分線。



證明

AC, AD 是以 A 作圓心的弧半徑

及 BC, BD 是以 B 作圓心的弧半徑

∵兩弧半徑相等

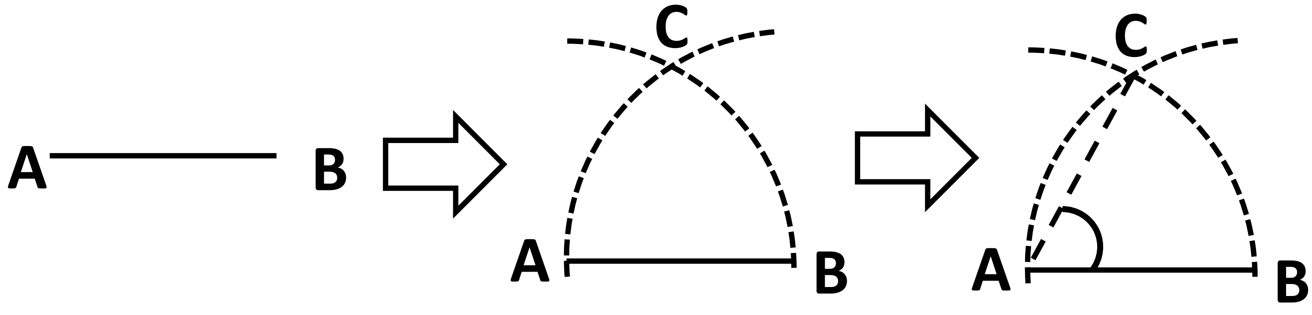
∴AC = AD = BC = BD

∴ADBC 是菱形

根據菱形的特性，對角線互相垂直及互相平分

∴CD 是 AB 的垂直平分線。

<u>60° 角</u>



給定一線段 AB。

分別以點 A 和點 B 作為圓心，用圓規畫出半徑為 AB 的弧並相交於點 C。

最後，用直尺連接點 C 及點 A。線 CA 與 AB 形成 60°角。

證明

如圖所示，

AB 和 AC 同為弧 CB 的半徑

∴AB = AC

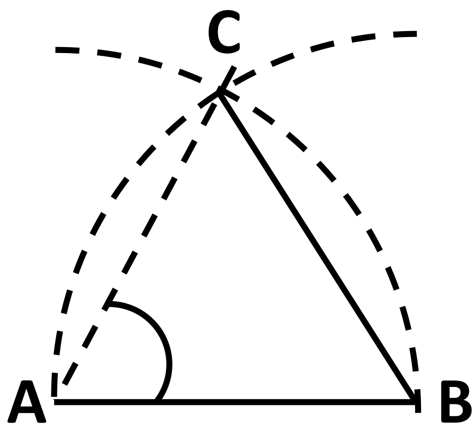
AB 和 BC 同為弧 AC 的半徑

∴AB = BC

∵AB = AC = BC

∴△ABC 是等邊三角形

∴ ∠CAB = 60°



經典難題

歷史至今出現了不少作圖難題，雖然部份已被數學家解決，但有部份則被認定為單靠圓規和無刻度的直尺是無法解決。以下是部分例子:

正多邊形的作圖

正多邊形是一個所有邊長及每一個內角的大小都是一樣的圖形，例如等邊三角形、正方形、正五邊形等。

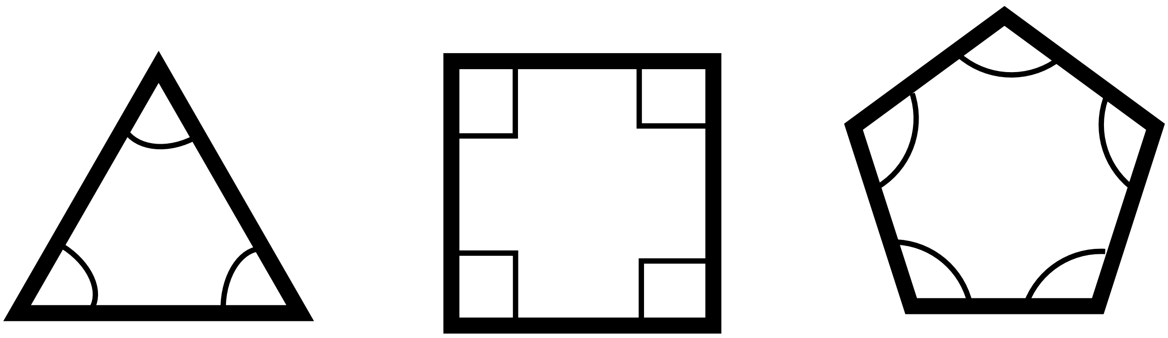


圖 1)　由左至右：等邊三角形、正方形及正五邊形。
每個圖形中，所有內角都是一樣大小。

其實只需運用量角器加上圓規直尺就可以作出所有正多邊形。不過，如果按照尺規作圖的規則，量角器是不容許使用。於是，正多邊形的作圖就變成不少數學家研究的課題了。

對於大部分偶數邊的圖形例如正方形、正六邊形甚至正八邊形等，都已被證明全部可以作圖成功。不過，對於奇數邊的圖形如等邊三角形、正五邊形、正七邊形等，卻並非全部皆可作圖成功。

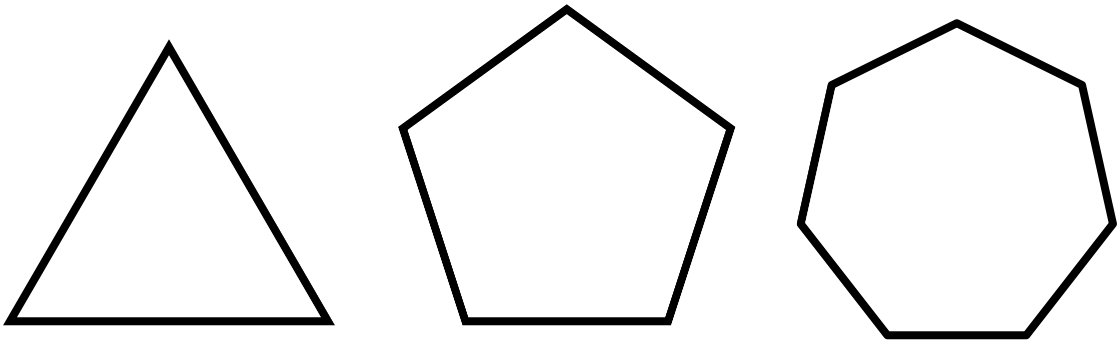


圖 2)　　等邊三角形、正五邊形及正七邊形為奇數邊的圖形

不過，到底有哪些奇數邊的圖形可以用尺規成功作圖呢？

要判斷一個奇數邊的圖形能否用尺規成功作圖，可以利用「費馬數」。

但甚麼是「費馬數」呢？

費馬數

Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

法國數學家費馬 (Pierre de Fermat) 在 1640 年作出了一個有關「費馬數」的猜想，費馬數具有以下形式：

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

其中 n 為非負整數。費馬認為所有費馬數都為質數。然而至今所發現的費馬質數，只有下列五個：

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

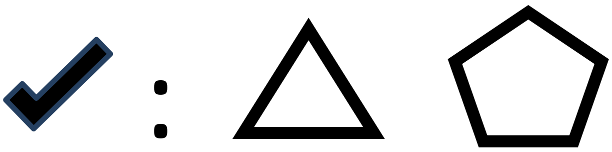
$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

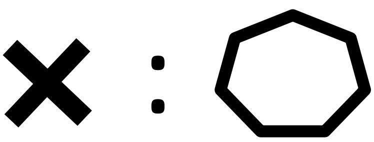
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

而德國數學家高斯其後更證明若 n 為質數，則可以用尺規作圖畫出正 n 邊形的充分必要條件是 n 是 2 的次方與費馬質數的乘積。



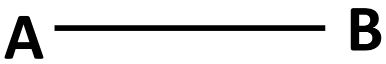


費馬數參考資料：

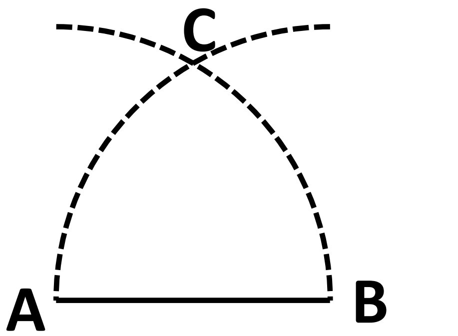
1. http://www.math.ust.hk/excalibur/v7_n4.pdf
2. http://www.wikipedia.or.ke/index.php/Fermat_number#Relationship_to_constructible_polygons

正多邊形的作圖例子

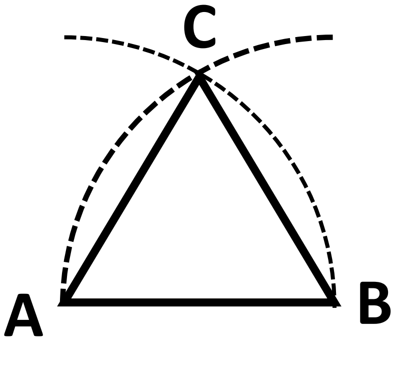
等邊三角形



給定一直線 AB。

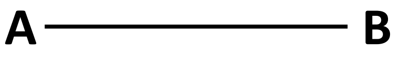


分別以點 A 和點 B 為圓心，AB 為半徑作弧，兩弧相交於點 C。

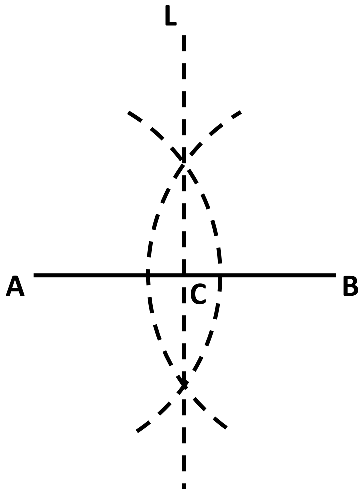


最後，連接 AC 和 BC。
ABC 為一個等邊三角形。

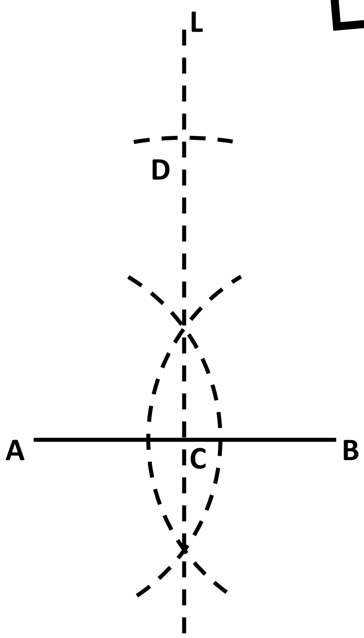
<u>正五邊形</u>



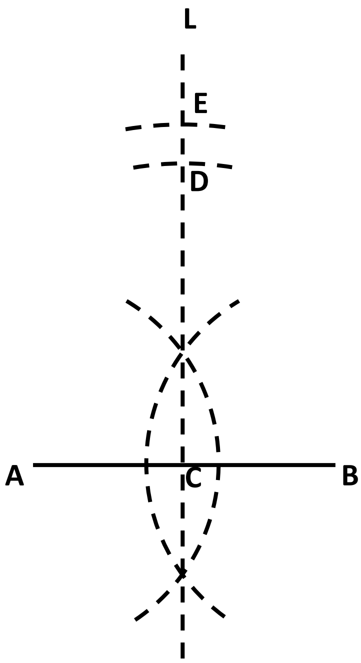
給定線段 AB。



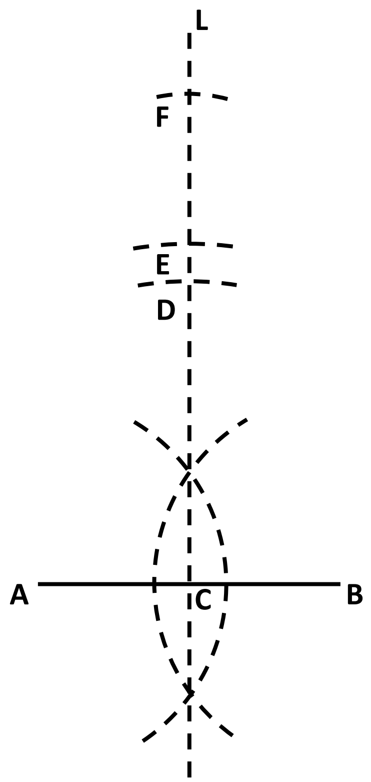
作 AB 的垂直平分線 L，
與 AB 相交於點 C。



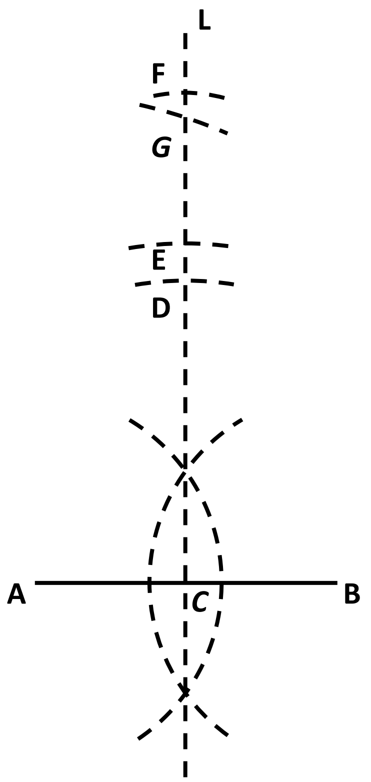
以點 C 為圓心，AB 為半徑
作弧，與 L 相交於點 D。



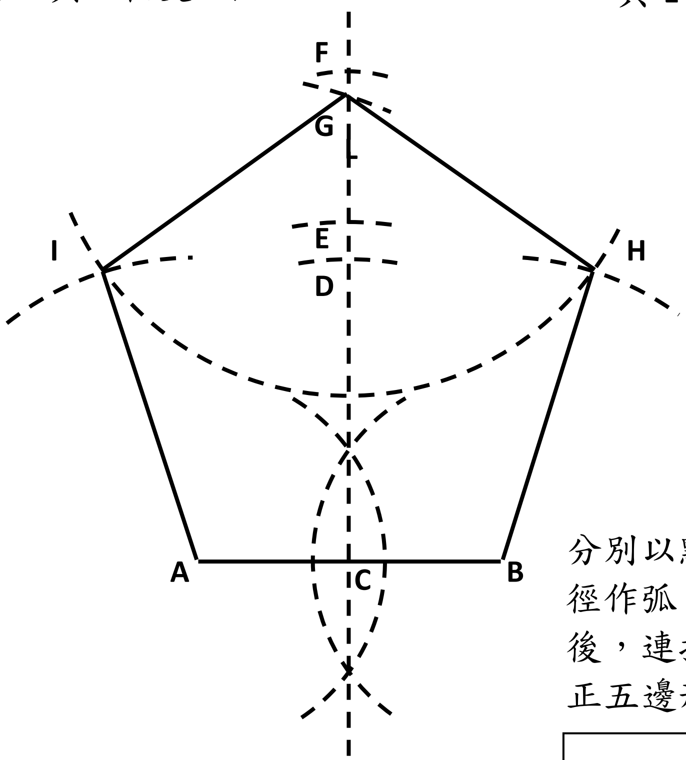
以點 C 為圓心，AD 為半
徑作弧，與 L 相交於點 E。



以點 E 為圓心，AC 為半徑作弧，與 L 相交於點 F。



以點 A 為圓心，CF 為半徑作弧，與 L 相交於點 G。



分別以點 A, B, G 為圓心，AB 為半徑作弧，弧線相交於點 H、I。最後，連接 BH、HG、GI 和 IA 成為正五邊形。

相關證明，見頁 41。

正多邊形的可造性與可摺性參考網址
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030420.pdf

古希臘三大難題

古希臘三大名題是早期希臘數學家特別感興趣的三個問題。它們分別是只用尺規作圖的方式去三等分角、倍立方以及化圓為方。全都已經證明無解。要了解這三個名題必先明白規矩數(可造數)的概念。

規矩數（可造數)

可造數可以簡單定義為能夠利用尺規作圖的方式作出的數。例子包括所有有理數、可造數的加減乘除以及可造數的平方根、四次方根和八次方根等 2^n 次方根。$\sqrt[3]{a}$ 、$\sqrt[5]{a}$以及 π 等都並非可造數，例如$\sqrt[3]{3}$ 、$\sqrt[5]{5}$都不是可造數。

可造數參考網址：
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A6%8F%E7%9F%A9%E6%95%B8

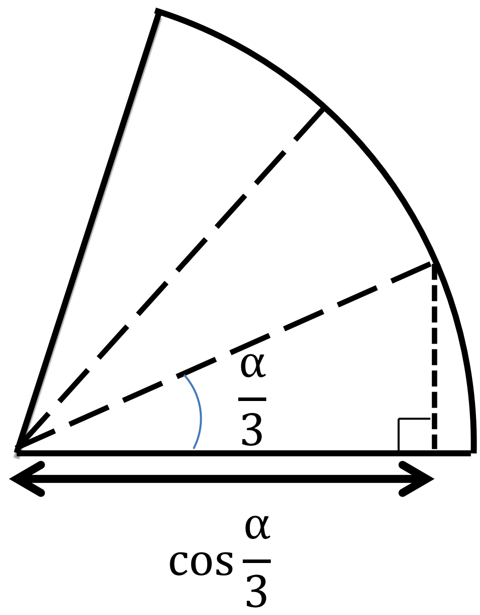
三等分角

不可能運用尺規作圖將任意角三等分。

設一隻角 α，若 α 可以用尺規作圖三等分成 $\frac{\alpha}{3}$，

則$\cos\frac{\alpha}{3}$ 為可造數。換言之，若果可以利用尺規作圖做出三等分角，

則尺規作圖可以畫出 $\cos\frac{\alpha}{3}$ 單位長的線。



假設 α 為 $60°$，$\frac{\alpha}{3}=20°$

設$x=\cos\frac{\alpha}{3}=\cos 20°$

按照三倍角公式

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\\
&= 4x^3-3x\\
&= \cos 60°\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

得出，$4x^3-3x=\frac{1}{2}$

$$8x^3-6x-1=0 \qquad (1)$$

由於方程(1)並沒有有理數的解，加上 x 的解會為三次方根(*)，不符合可造數為2^n次方根的規定，故$\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$並非可造數。因此三等分角不可能作圖成功。

* 方程(1)的解，見頁 42。

倍立方

已知一立方體，不可能運用運用尺規作圖畫出一個體積為該立方體兩倍的一個立方體。

假設該立方體的邊長單位為 1，其體積單位為 1 立方單位。

若邊長單位為 x 的立方體體積為該已知立方體的兩倍，

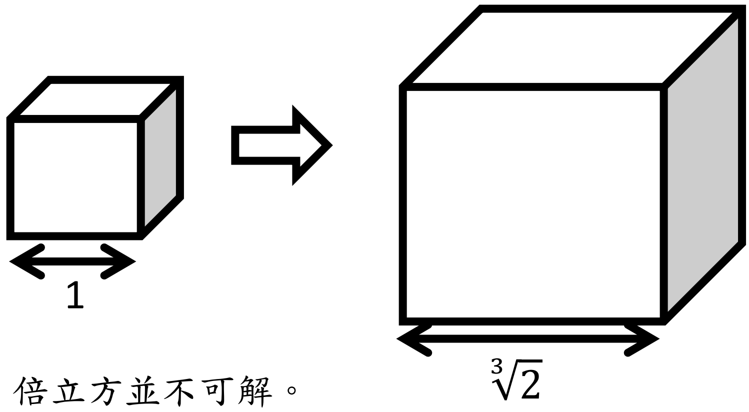
得出 : $x^3 = 2$

$x = \sqrt[3]{2}$

由於 x 是三次方根，

並不是2^n次方根，

所以，x 不是可造數。因此，倍立方並不可解。



化圓為方

不可能運用尺規作圖畫出一個與給定圓形面積一樣的正方形。

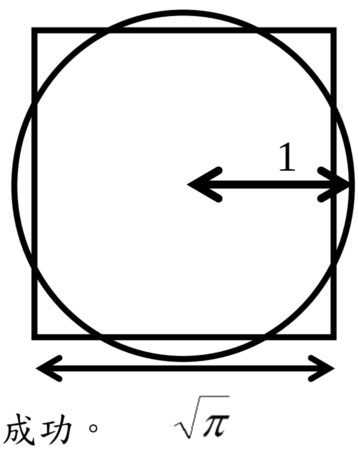
假設有一個圓形的半徑單位為 1，

其面積為 $\pi\times1^2=\pi$ 平方單位。

所求正方形面積為 π 平方單位，

而邊長為$\sqrt{\pi}$ 單位。由於 π 並非可造數，

所以$\sqrt{\pi}$ 亦非可造數。因此化圓為方不可作圖成功。



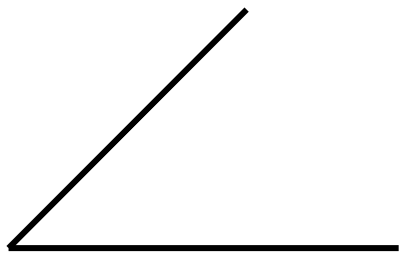
<u>挑 戰 站</u>

以下是一些作圖的題目，試試動手畫出所求的圖形。

<u>1) 正六邊形 (邊長為 AB)</u>

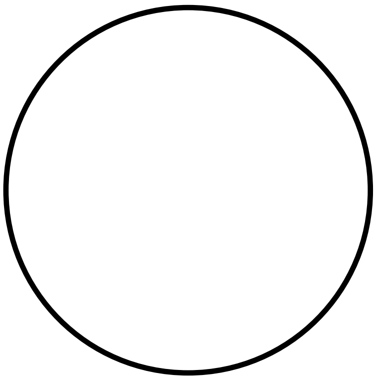
<u>2) 設 AB = 1 單位，畫出長度為$\sqrt{3}$單位的線段</u>

<u>3) 複製右圖的角度在 AB 上</u>



4) 30°角

5) 找出已知圓的圓心



***6) 72°角**

正多邊形剪紙

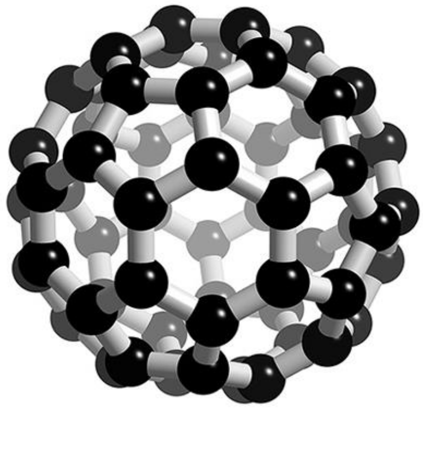
在日常生活中，我們不難發現身邊不同的事物都有十分複雜的結構，大至建築物、小至微生物，它們都是根據不同的原理由無數物質聚合而成的集合體。隨着科技的進步與各種方面知識的突破，愈來愈多的假設被廣泛研究、試驗，最終得以證實——幾何學與數理關係的研究便是一個好例子。

事實上，無論是結構多複雜的物體，都是由粒子組成的相異多邊形所組合而成的——無盡的粒子多邊形創造出近乎無限的可能性與可探究性。即使在日常生活中，我們也能看到如蜂巢、天然石塊等多邊形的具體例子。雖然多邊形隨處可見，但你們可曾嘗試親手製作正多邊形？

比起飄渺的理論解釋，相信日常生活中的應用更見實際，這部分讓我們以較為輕鬆的步伐來理解各種正多邊形的剪紙方法與涉及其中的相關數理知識吧！

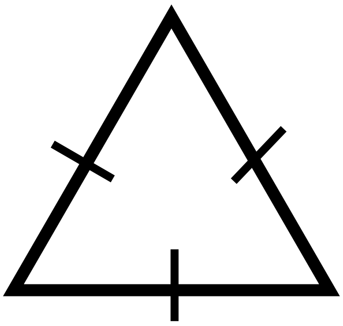
由 20 個正六邊形和 12 個正五邊形

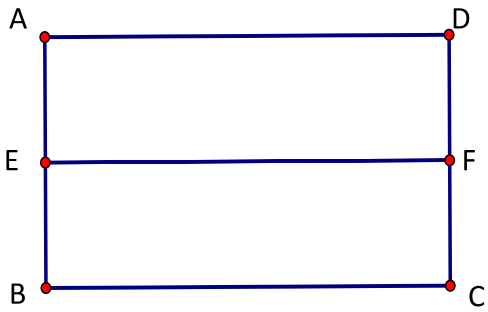
合成的基礎分子：碳六十分子



足球

正多邊形剪紙(等邊三角形)

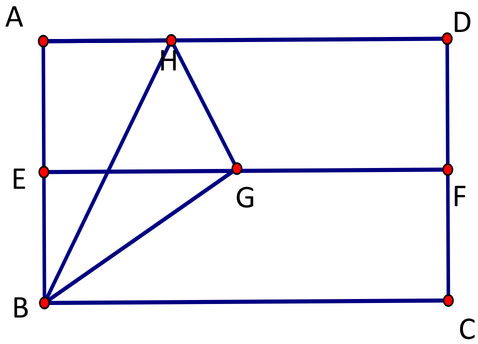




步驟 1: 在長方形 ABCD (設 AD＞AB)

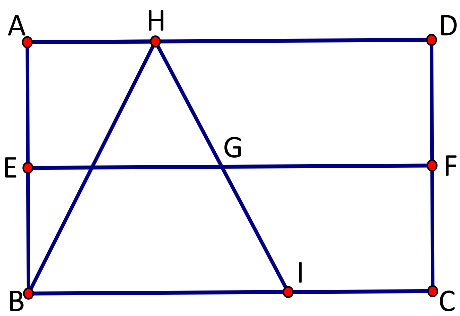
中取 AB 和 CD 的中點 (E 和 F)，

取得中線 EF。



步驟 2: 以點 B 為中心，將左上角的 A

點置於 EF 上的點 G，

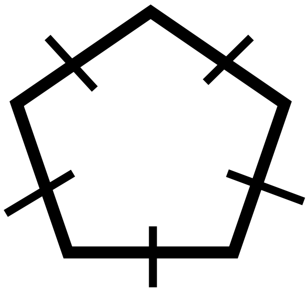


步驟 3: 沿重疊線 HG 摺出摺痕 HI，而

ΔBHI 為等邊三角形。

步驟 4: 沿三角形紙痕剪出。

<u>正多邊形剪紙(正五邊形)</u>



步驟 1: 在長方形 ABCD (設 AD＞AB) 中取 AB 和 CD 的中點 (E 和 F)，取得中線 EF。

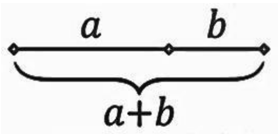
步驟 2: 在線 AB 上找出<u>黃金分割點</u>*G。

步驟 3: 以 點 G 為中心，將頂點 A 置於 EF 上，摺出摺痕 GH。

步驟 4: 利用正五邊形的對稱性質和點 H，得出正五邊形 IHGKJ。

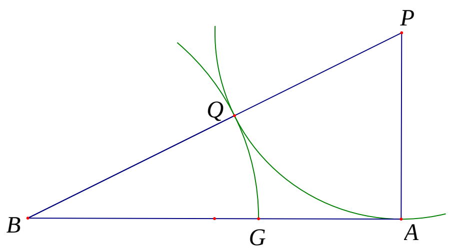
步驟 5: 沿正五邊形紙痕剪出。

*黃金分割點(如下圖示): $a+b$ 與 a (較長) 的比例等同於 a 與 b (較短) 的比例。

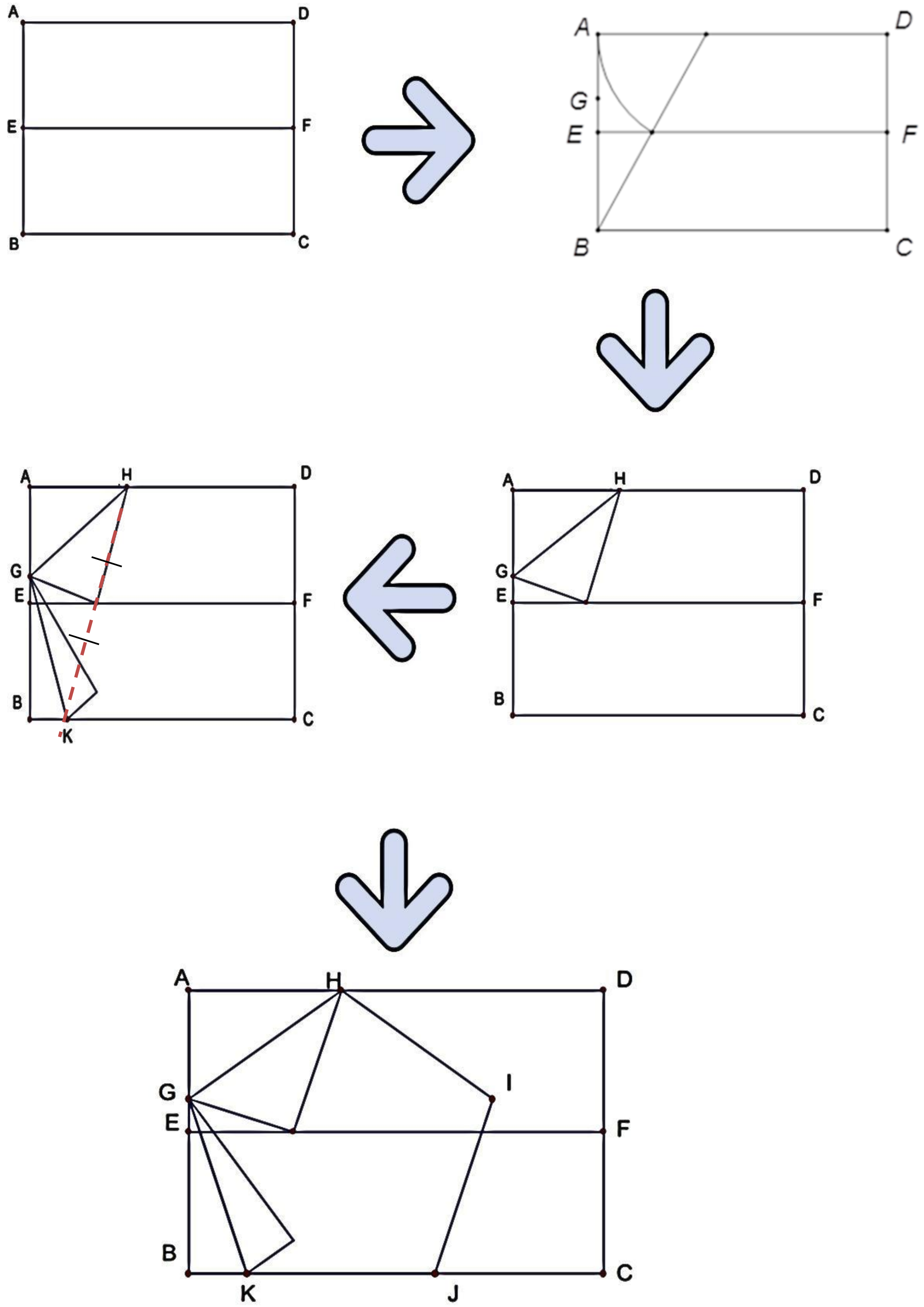


$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ 此比例稱為黃金比。

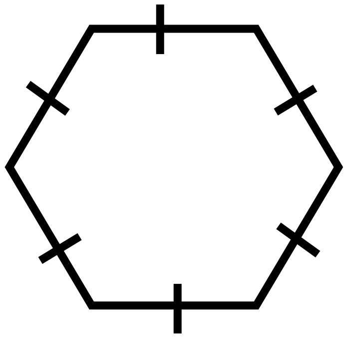
以尺規作圖找出<u>黃金分割點</u>*G：

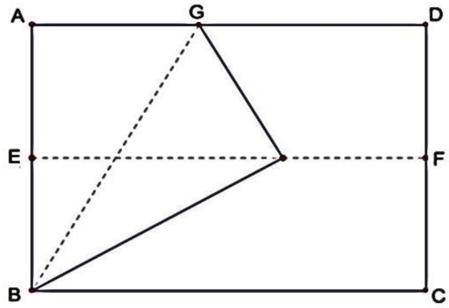


1. 在點 A 作線段 AP 垂直於 BA，且 AP= BA/2
2. 連接 BP
3. 以點 P 為圓心，AP 為半徑，作弧交 BP 於點 Q
4. 以點 B 為圓心，BQ 為半徑，作弧交 BA 於點 G，求得黃金分割點(點 G)


A D E F B C
A D G E F B C
A H D G E F B C
A H D G E F B K C
A H D I G E F B K J C

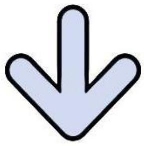
正多邊形剪紙(正六邊形)

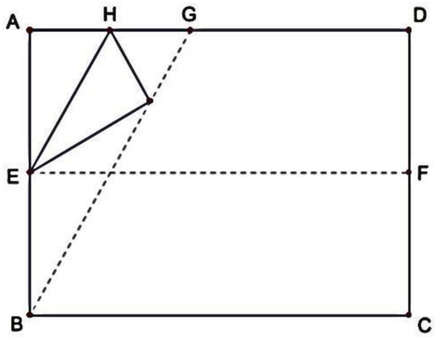




步驟 1: 在長方形 ABCD (設 AD＞AB)中取 AB 和 CD 的中點 (E 和 F),取得中線 EF。

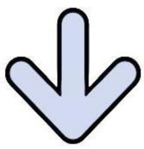
步驟 2: 以點 B 為中心,將左上角的點 A 置於線 EF，摺出摺痕 BG。

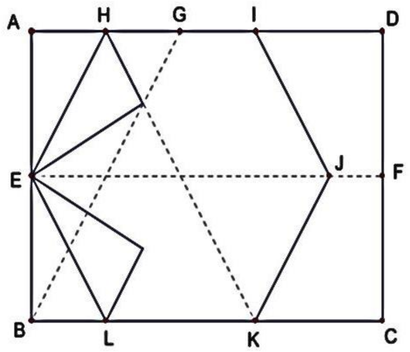




步驟 3: 以點 E 為中心將 A 點置於線 BG 上摺出摺痕 EH。

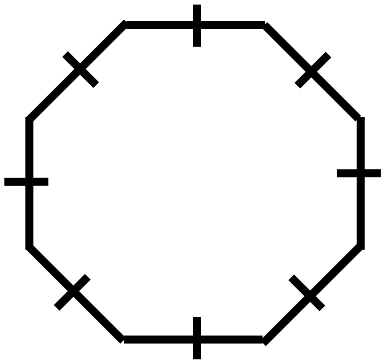
步驟 4: 利用正六邊形的對稱性質和點 G，得出正六邊形 IJKLEH。

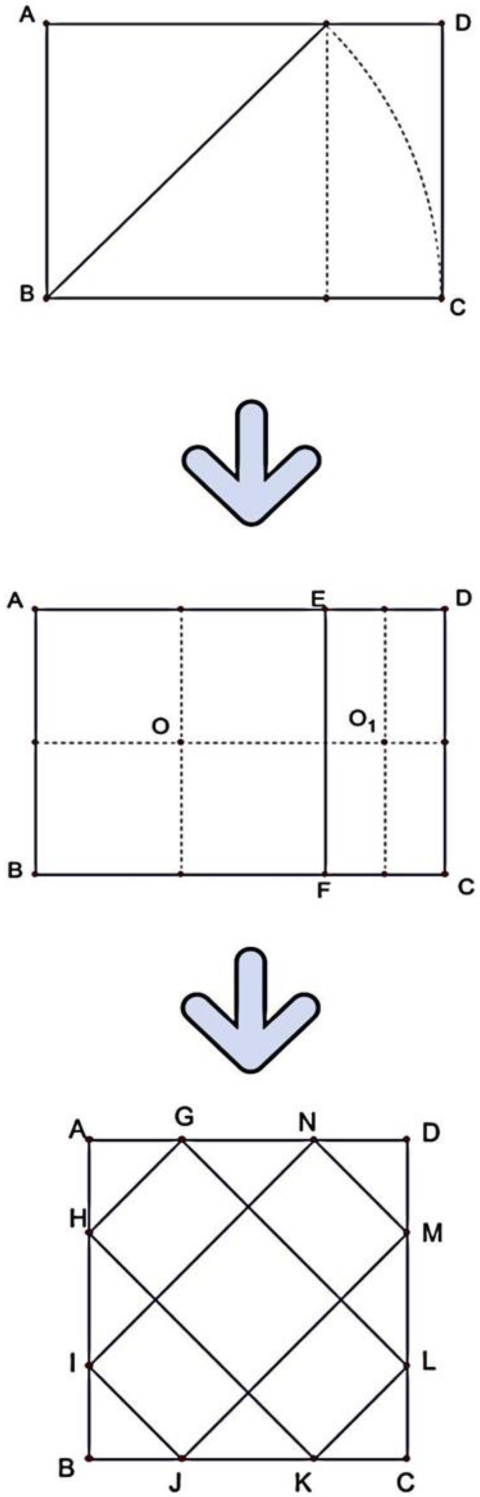




步驟 5: 沿正六邊形紙痕剪出。

正多邊形剪紙(正八邊形)





步驟 1: 作一矩形 ABCD 使 AB : BC = 1:$\sqrt{2}$ 。

步驟 2: 作正方形 ABFE 及其中心 O。

步驟 3: 將矩形 EFCD 剪下並取其中心 O_1。

步驟 4: 讓矩形 EFCD 置於正方形 ABFE 上，使

點 O_1 落在點 O 上。

矩形的四個頂點分別落在 AB、BC、

CD、AD 上，標交點為 I、J、M 和 N。

步驟 5: 按以上方法轉另一個方向取 G、H、K

和 L 四點，則成正八邊形 GHIJKLMN。

資料來源：正多邊形的可造性與可摺性
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030420.pdf

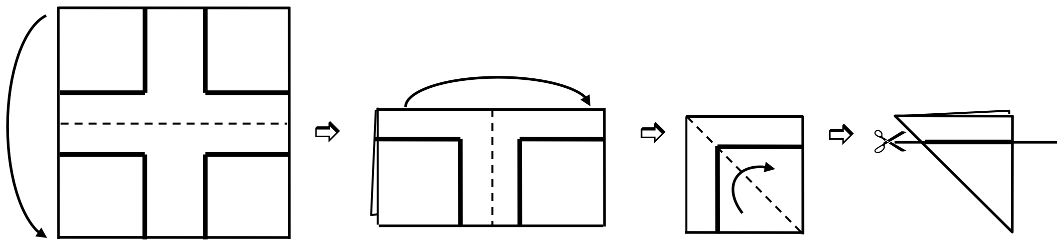
一刀剪

剪紙的歷史源遠流長，是中國及日本十分流行的民間藝術之一。透過一張紙、一把剪刀，可以剪出千變萬化的圖案，的確神奇。但是今天要介紹的並不是傳統的剪紙藝術，而是與數學有密切關係的剪紙方法 ------「一刀剪」。「一刀剪」是指透過多次摺疊一張正方形的紙，最後只剪一刀，便可剪出特定的形狀。

一刀剪的基本原理:

大家不需要擔心當中涉及很複雜的數學原理及很艱深的數學知識。一刀剪的原理其實很簡單，就是透過摺紙的方法，讓圖形的所有邊線重疊在同一直線之上，但我們要怎樣才可以做到呢?對，在這個時候，數學往往都能助我們一臂之力:原來只需要留意圖形的對稱特性，好好利用角平分線作指標便可。讓我們先看看一個簡單「一刀剪」的例子吧，大家亦可以跟著圖示動動手、做做看。

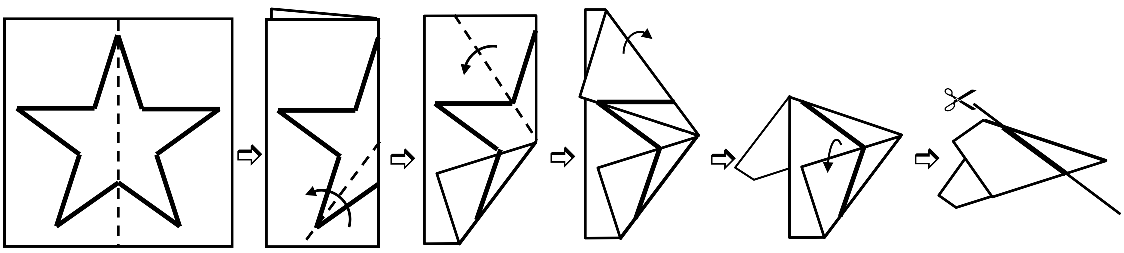
如何利用一刀剪剪出十字形?



首先在正方形的紙上畫上一個十字形的圖樣，按著圖形的對稱特性上下對摺一次，再左右對摺一次，得出了左三的圖樣，然後我們依照圖中角平分線對摺，就會得出最右方的圖樣。留意所有圖形的邊線已經重疊成一直線，所以一剪就會剪出這個十字形。

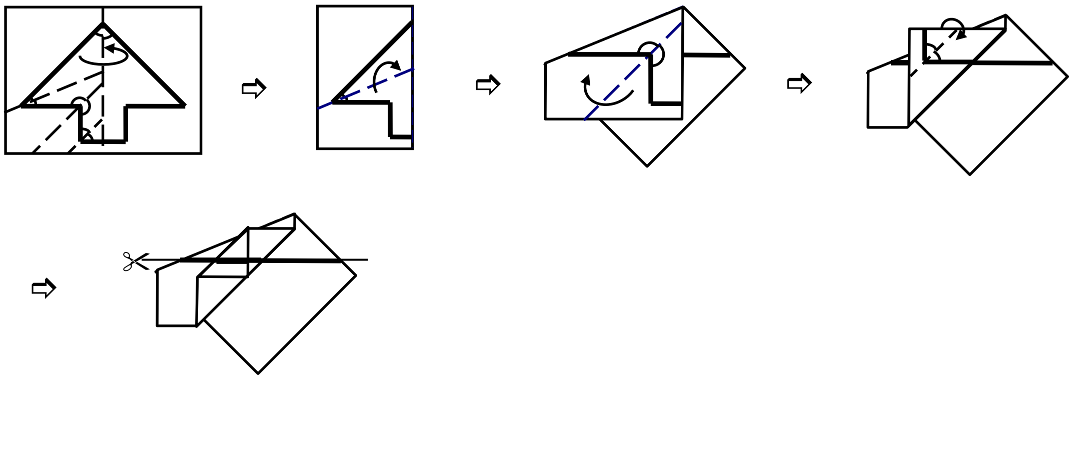
看過以上十字形一刀剪的例子之後，相信大家都已經對一刀剪有了一個概念，亦開始對一刀剪想有了更清楚的了解及認知。那現在我們再看幾個不太複雜的例子，大家不妨跟着摺摺看。

如何利用一刀剪剪出星形?

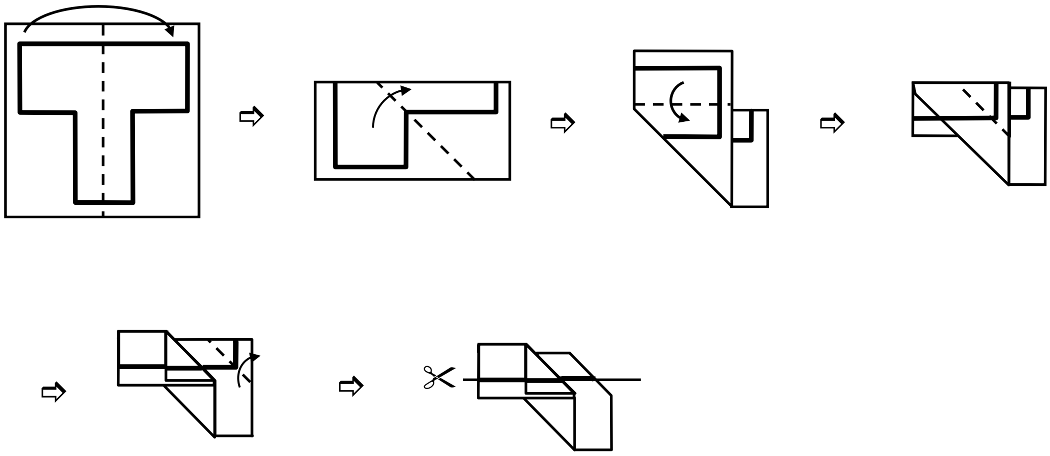


⌧記著要留意星形的對稱性質及角平分線的運用!

如何利用一刀剪剪出箭頭?



如何利用一刀剪剪出字母T?



利用一刀剪剪出簡單的形狀

相信大家看過以上十字形、星形、字母T及箭頭的一刀剪例子，都感受到一刀剪充滿魅力及趣味，並對一刀剪產生興趣。接下來，我們會介紹一些數學上常見圖形的一刀剪步驟，如正方形、直角三角形、等腰三角形、多邊形等，亦會講解到在剪摺這些圖形的時候需注意的事項及小技巧等等，讓大家在跟著摺的時候更能得心應手。

(一) 長方形

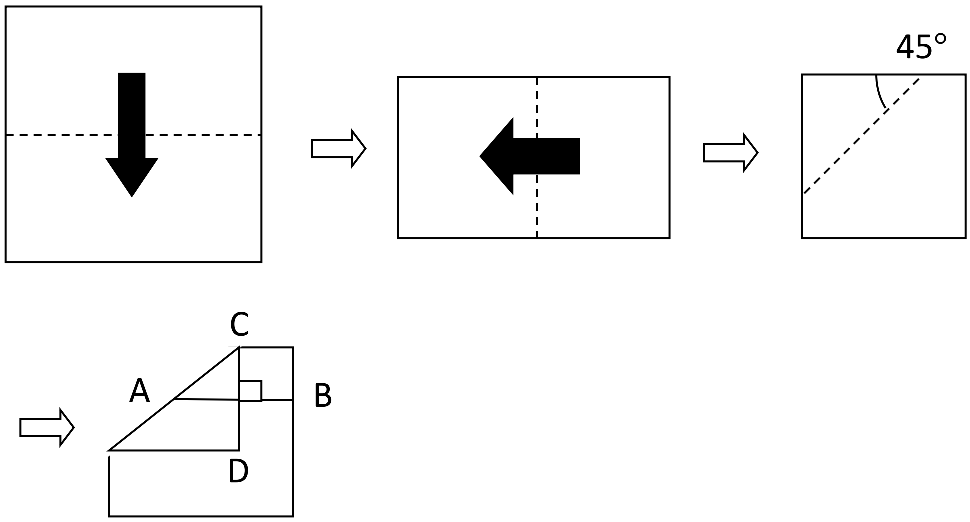
❶把原來的正方形紙往下對摺。

❷向左邊對摺。

❸如圖所示，把左上角往右下方摺。

注意摺線需與上邊成45°，但不可完全重疊 (可利用量角器輔助)。

❹如圖所示，取任意AB使AB⊥CD，沿線AB剪。



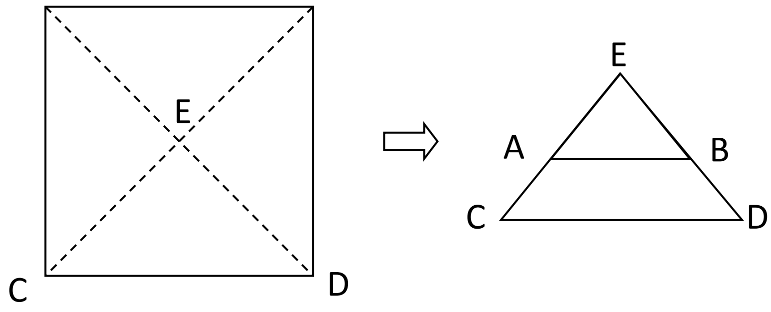
問: 如何剪出不同大小的長方形？

答: 在步驟❹中，摺在紙上的三角形越小，剪出的長方形的長寬比例越大。

(二) 正方形

❶沿兩條對角線對摺再對摺。

❷如圖所示，取任意AB使AB//CD，沿線AB剪。



問: 如何剪出不同大小的正方形？

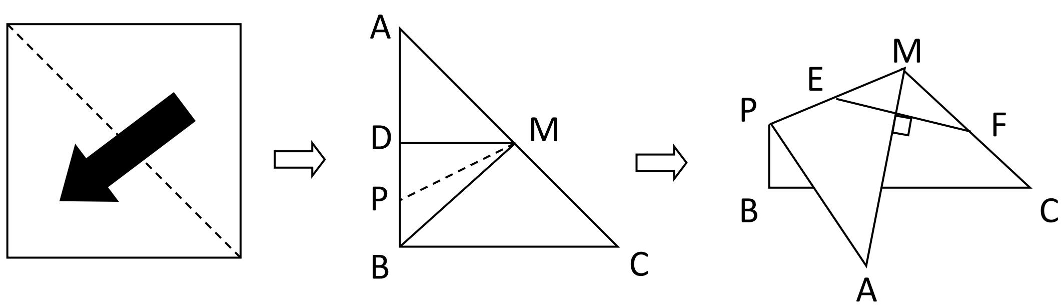
答: 在步驟❷中，AB與CD愈近，所剪出的正方形會愈大。

(三) 等腰三角形

❶沿對角線對摺。

❷如圖所示，M為AC的中點，AD⊥DM。取在DB上的一點P，並沿MP對摺。

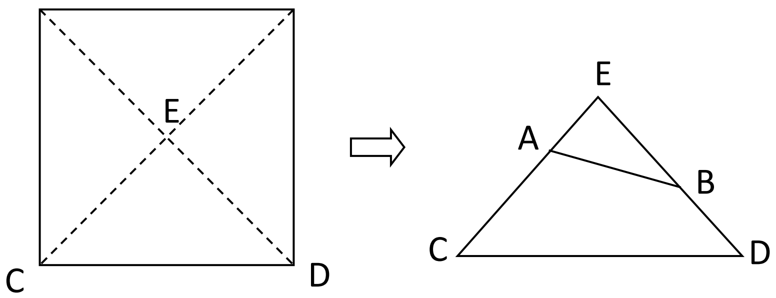
❸取PM上的一點E及取MC上的一點F使EF⊥MA，沿EF剪。



(四) 菱形

❶沿兩條對角線對摺再對摺。

❷如圖所示，取任意AB，沿AB剪。



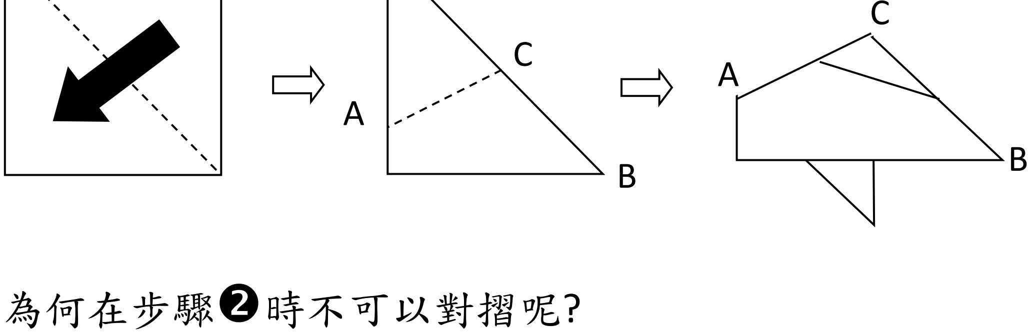
小提示: 由於菱形的四個邊都等長，於是我們將正方形的紙沿著兩條對角線摺成四等份，所以不論我們怎麼剪，我們都能一刀剪出菱形。

(五) 鷂形

❶沿著對角線對摺。

❷以點C (點C為斜邊中點) 為頂點隨意往下摺 (但不可對摺)。

❸在CA及BC上各任取一點，以直線相連，剪下去。



為何在步驟❷時不可以對摺呢?

因為若果對摺,剪出來的圖形就會是菱形 (因為剪出的四條邊均相等)

(六) 正多邊形

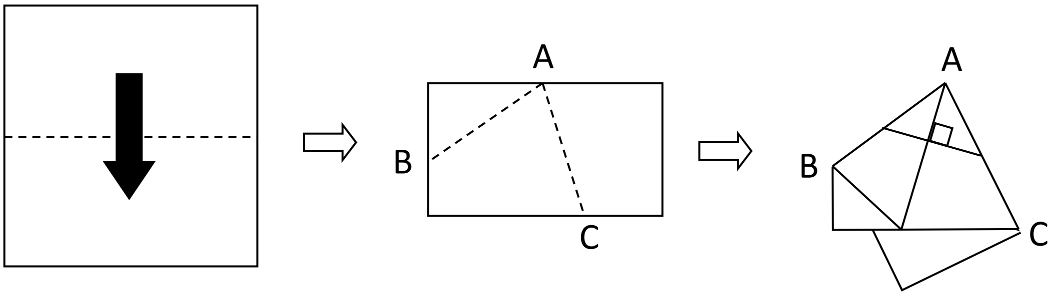
A. 正N邊形 (設N為奇數)

(以正五邊形為例)：

❶往下摺。

❷由點A (摺紙的中點) 畫出 $\frac{N-1}{2}$ 個 $\frac{360°}{N}$ 的角並沿所畫出的線摺。

❸畫出摺處的垂直線 (兩端分別需在AB及AC上) 並剪下去。



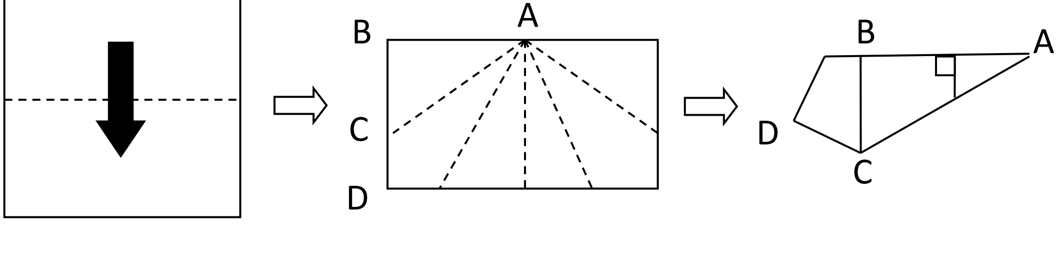
B. 正N邊形 (設N為偶數)

(以正六邊形為例)：

❶往下摺。

❷由點A (摺紙的中點) 畫出N個 $\frac{180°}{N}$ 的角並沿所畫出的線對摺。

❸畫出兩端分別在AB及AC上，且與AB垂直的線，剪下去。



看過以上幾個常見的圖形及各種特別的例子 (如箭頭、T字形等)，相信聰明的大家都必定發現以上介紹的圖樣都是對稱的，因為圖形當中的對稱特性亦令我們可以更簡單地一刀剪出以上圖形。但在現實生活中，並不是所有圖形都是對稱的，那麼我們又是否可以一刀剪出這些圖形呢？答案是可以的，其實所有的圖形都能以一刀剪的方式剪出，但當中所要求的技巧及數學知識亦會相對地提高。簡單來說，非對稱圖形的一刀剪的複雜性很高，而我們亦需要額外的進階技巧作幫助。

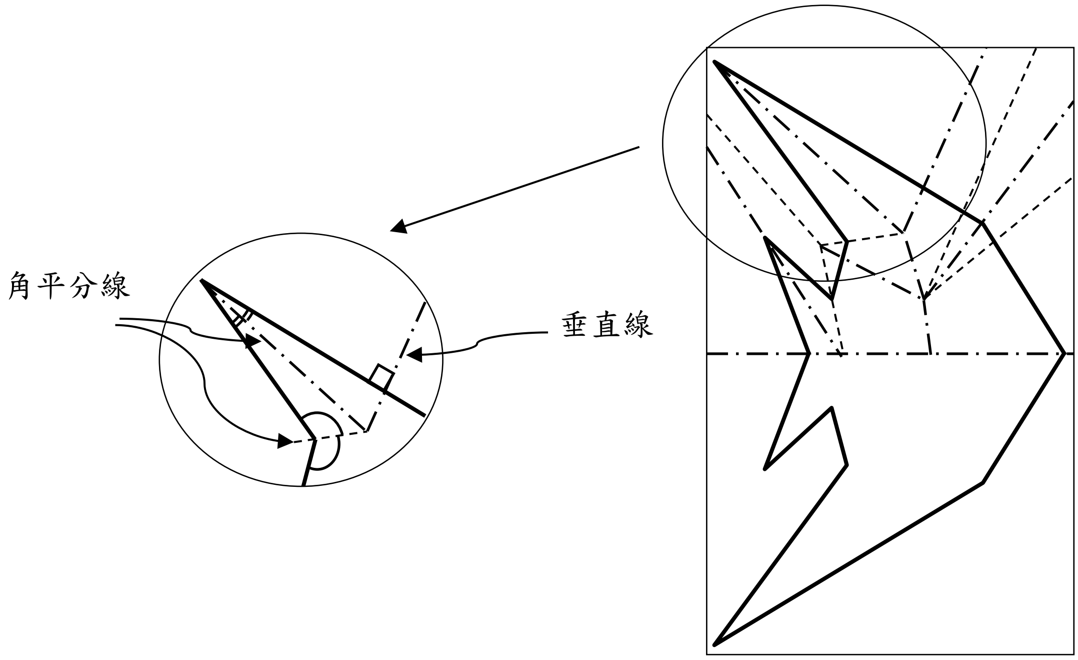
一刀剪的進階技巧

1) 若角平分線在圖形中相交，有須要時，用垂直線來輔助。
2) 若圖案有左右對稱性質，則先沿該對稱軸摺疊。
3) 再沿所有虛線摺疊，形成摺痕。

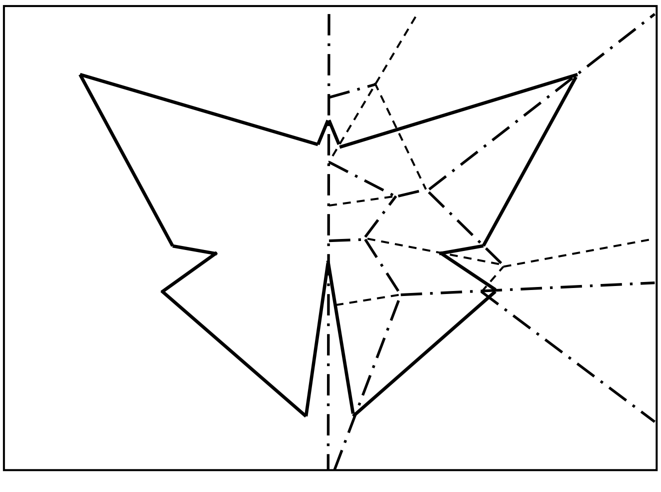
   圖中“–·–”為「山脊」、“---- ”為「山谷」。
4) 同時將所有摺痕順勢「收起」和摺疊。
5) 最後，所有邊重疊成一直線。沿此線剪一刀。

現在，就讓我們看看一些需要依照以上進階技巧的較複雜例子吧！

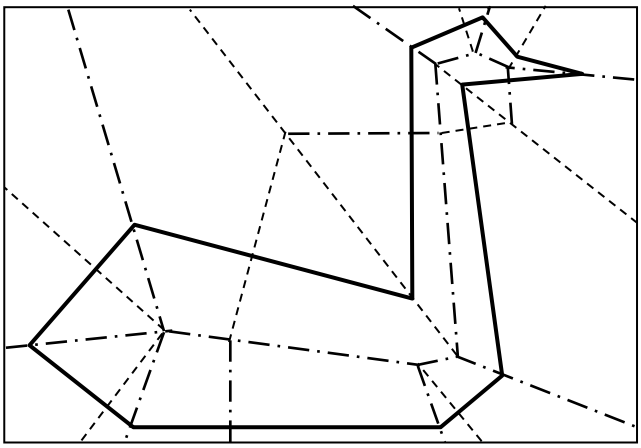
金魚



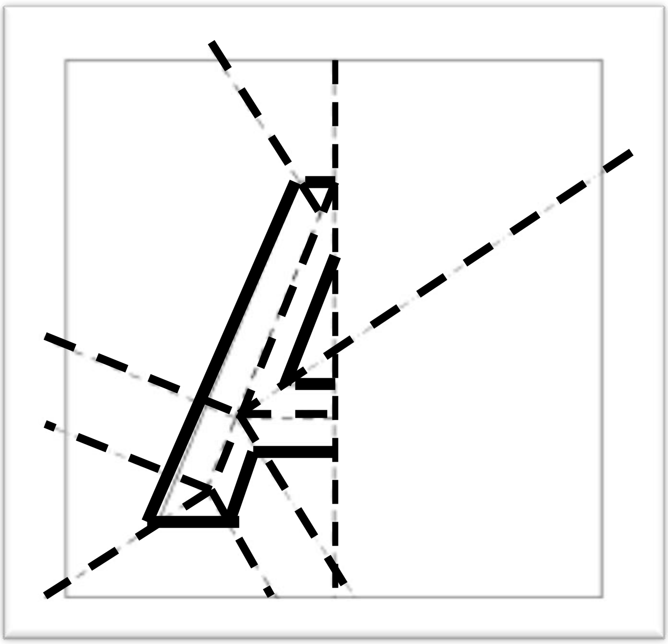
蝴蝶



天鵝

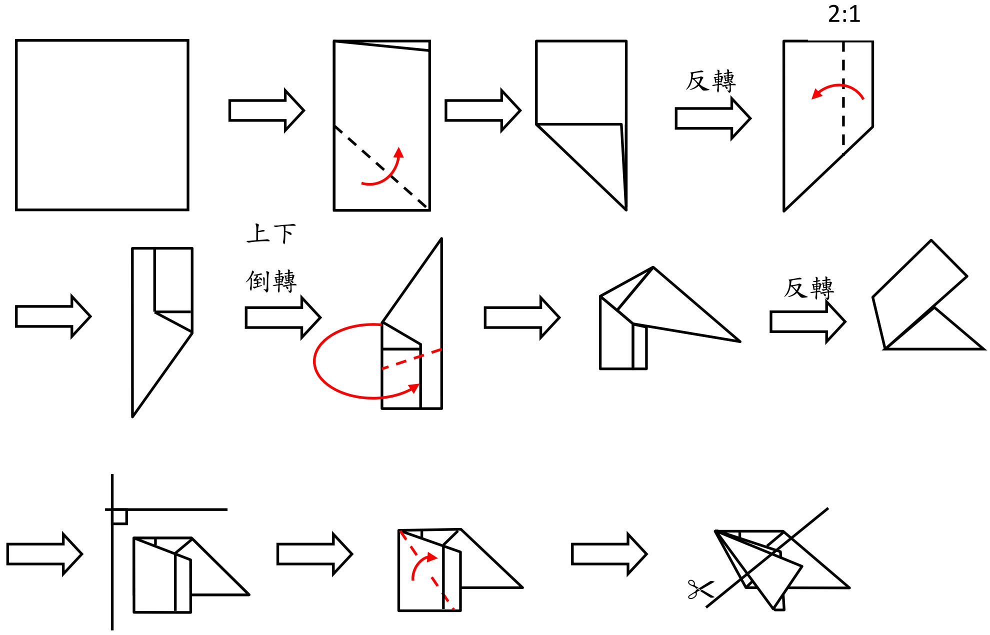


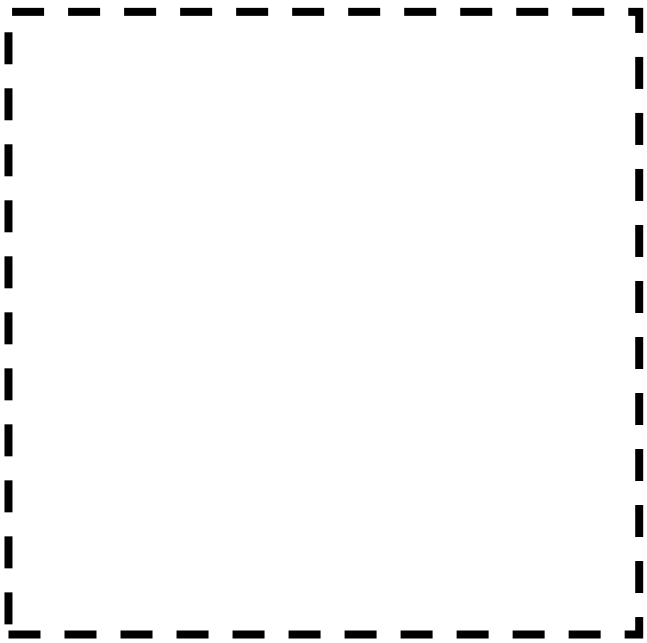
字母 A



<u>動動手，做做看</u>

最後，就讓我們大家一起動動手，剪出下面的正方形，並依照以下的步驟摺出神秘圖形，送給我們身邊的親友吧!



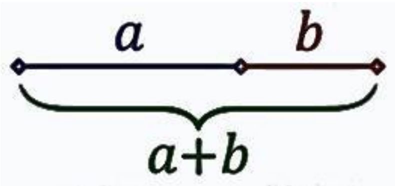


資料來源：

1. http://resources.edb.gov.hk/gifted/ge_resource_bank/files/TeachingLearning/A/CPS/Pullout_cut_fold_jigsaw.pdf
2. http://resources.edb.gov.hk/gifted/GE_math/pullout/cut_fold_jigsaw.html

附錄

1. 黃金分割點



若將一線段分為兩部分 a 和 b，使得原來線段的總長度 $(a+b)$ 與較長的那部分 (a) 之比等於較長的那部分 (a) 與較短的那部分 (b) 之比，即 $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$，則我們稱這比例為黃金分割比，又稱黃金比 (Φ)。

$$\Phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

應用時，我們一般取 $\Phi\approx0.618$ 或 1.618，就像圓周率在應用時取 $\pi\approx3.14$ 一樣。

如何得出這兩個 Φ 的值呢？且看下列計算方法：

$$\Phi=\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi=1+\frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi^2-\Phi-1=0$$

找出該一元二次方程的正解，$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.6180339887$

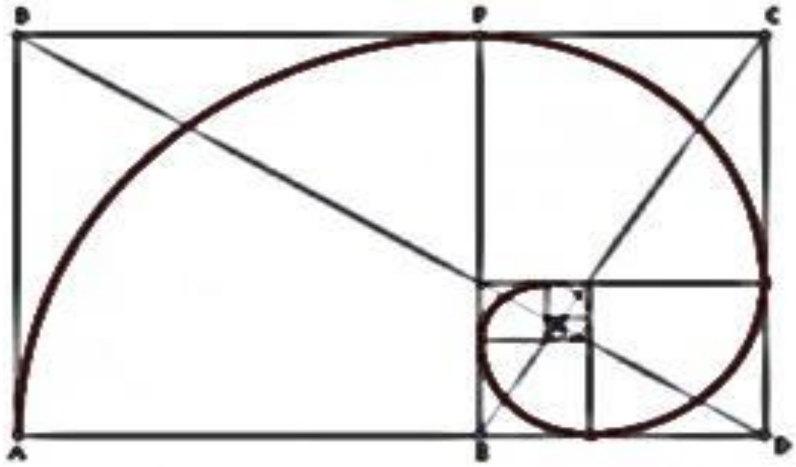
且看黃金比的另一表達方式：$\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a}$。

由於 $\Phi=1+\dfrac{1}{\Phi}$，得 $\dfrac{1}{\Phi}=\Phi-1\approx 1.618...-1\approx 0.618...$。

因此，黃金比 $\dfrac{1}{\Phi}\approx\dfrac{1}{1.6180339887}\approx 0.6180339887$

亦可表達為： $\Phi-1\approx 1.6180339887-1\approx 0.6180339887$

我們可利用線段上的兩黃金分割點，作出正五角星、正五邊形、正十邊形等。黃金比亦常呈現在大自然中，如鸚鵡螺的螺旋紋和一些動物和植物的外觀等。



黃金矩形
「長與寬的比值」=「寬與長寬差之比值」

參考網址：

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
2. http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87
3. http://www.mathland.idv.tw/cai/gold.html

2. 黃金分割的歷史

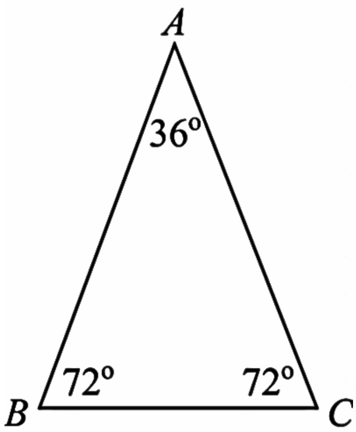
由於公元前 6 世紀古希臘的畢達哥拉斯學派研究過正五邊形和正十邊形的作圖，因此現代數學家們推斷當時畢達哥拉斯學派已經觸及甚至掌握了黃金分割。公元前 4 世紀，古希臘的歐多克索斯是首位有系統地研究這一問題的數學家，並建立起比例理論。

公元前 3 世紀，歐幾里得撰寫《幾何原本》時吸收了歐多克索斯的研究成果，進一步有系統地論述了黃金比，成為最早有關黃金比的論著。

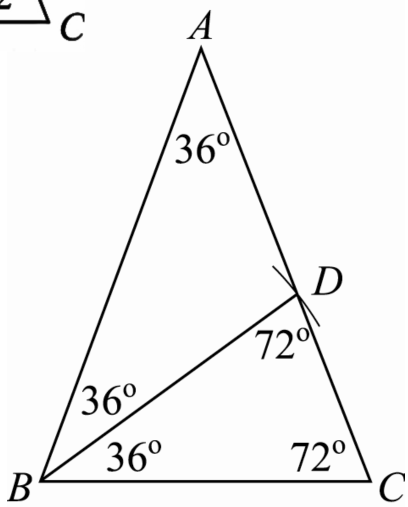
中世紀後，黃金比被披上神秘的外衣，義大利數學家帕喬利稱此比例為神聖比例，並專門為此著書立說。德國天文學家克卜勒稱神聖比例為黃金比。到 19 世紀，黃金比這一名稱才逐漸通行。

黃金分割數有許多有趣的性質，人類對它的實際應用也很廣泛，最著名的例子是由美國數學家基弗於 1953 年首先提出，利用黃金比進行優選法的學說，這學說在 70 年代於中國被推廣。

3. 等腰三角形與黃金比的關係



證明: 等腰三角形中也有黃金比



如圖所示。畫出∠ABC 的角平分線 BD。

∠ABD＝∠CBD＝36°

在△BDC 中，

∠BDC＝180°－36°－72°＝72° (三角形內角和)

∵ ∠BCD＝ ∠BDC＝72°

∴ BC＝BD (等角對邊相等)

∵ ∠BAD＝∠ABD = 36°

∴ AD＝BD (等角對邊相等)

∴ AD＝BD＝BC

在△ABC 及△BCD 中，

∠BAC＝∠CBD＝36°

∠ABC＝∠BCD＝72°

∠ACB＝∠BDC＝72°

∴ △ABC～△BCD (A.A.A.)

∵ △ABC～△BCD (已証)

∴ AC : BD＝BC : CD (相似三角形的對應邊)

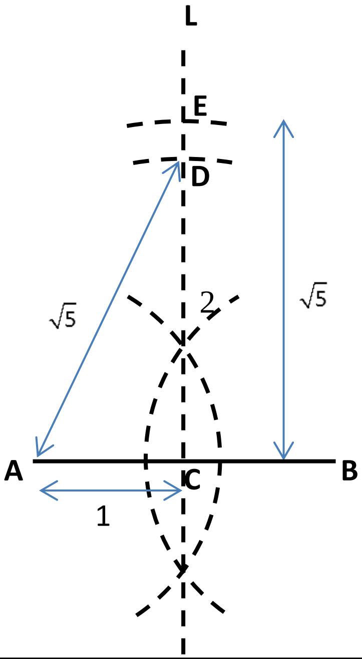
∴ AC : AD＝AD : CD

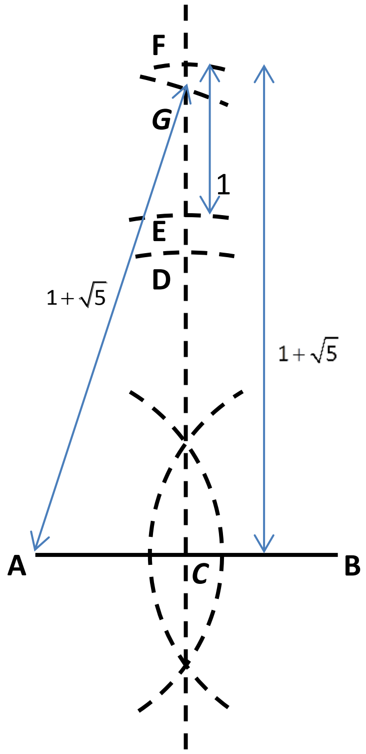
∴ AD : CD 是黃金比。

(黃金比定義: 總長度與長度較長的線之比等於長度較長的線與長度較短

4. 繪畫正五邊形的原理

設線段 AB 長 2 單位。





$\because AC = 1$ and $CD = AB = 2$

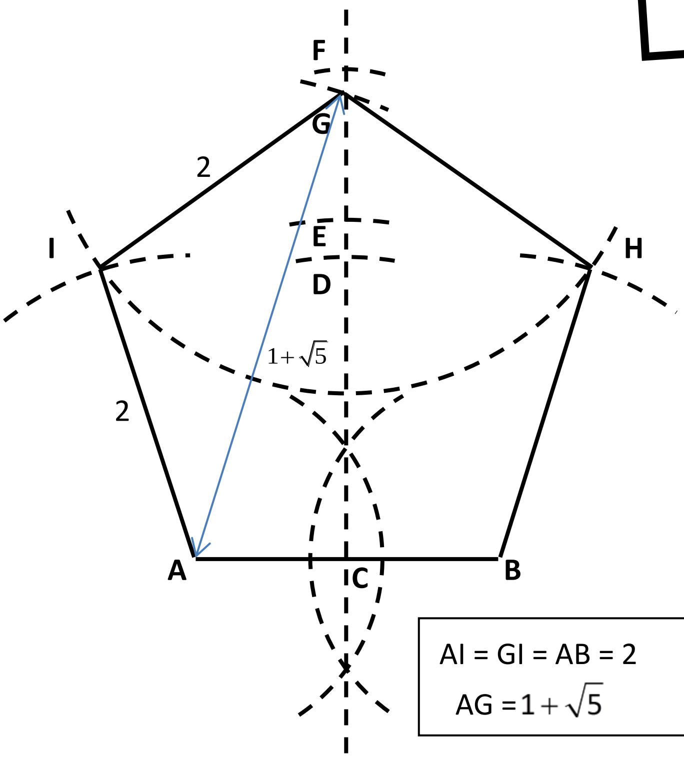
$\therefore AD = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$CE = AD = \sqrt{5}$

$\because EF = AC = 1$

$\therefore CF = 1+\sqrt{5}$

$AG = CF = 1+\sqrt{5}$



$AI = GI = AB = 2$

$AG = 1+\sqrt{5}$

考慮ΔIAG，

根據餘弦公式，

$$\cos\angle AIG = \frac{2^2+2^2-\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2(2)(2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

得$\angle AIG = 108°$。

另外，考慮ΔGAC，

$$\cos\angle GAC = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

得$\angle GAC = 72°$。

5. 沒有有理數的解的證明

方程 $8x^3-6x-1=0$ 沒有有理數的解。

證明：設 $y=2x$，則 $y^3-3y-1=0$ … (*)

假設方程(*) 有有理數的解，$\frac{p}{q}$，當中 p, q 為互質整數，

且 $q\neq 0$。

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3-3\left(\frac{p}{q}\right)-1=0$$

$$p^3=q^2(3p+q) \quad \text{和} \quad q^3=p\left(p^2-3q^2\right)$$

$\therefore \quad p \mid q$ 和 $q \mid p$ (即 p 被 q 整除及 q 被 p 整除)

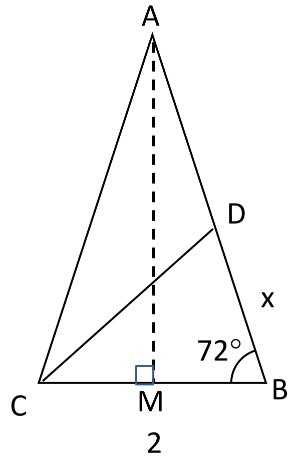
$$\frac{p}{q}=1 \text{ 或 } -1$$

但 $1^3-3(1)-1=-3\neq 0$ 和 $(-1)^3-3(-1)-1=1\neq 0$

$\therefore$ $8x^3-6x-1=0$ 沒有有理數的解。

6. 尋找 cos72°真確值的方法

考慮圖中的等腰三角形 ΔABC。



$AC = AB$，$\angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$，

CD 為 $\angle ACB$ 的角平分線。

設 $CB = 2$，$DB = x$。

$\because$ CD 是 $\angle ACB$ 的角平分線，

$\therefore$ $\angle DCB = \angle ACD = 36^\circ$。

在 ΔABC 和 ΔBCD 中，由三角形的內角和可知，

$$\angle CAB = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

$$\angle BDC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

由此可見， $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ (AAA) 及 $AD = CD = CB = 2$。

所以， $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BC}{DB}$

$$\frac{2+x}{2} = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = -1 \pm \sqrt{5}\text{，}$$

由於 $x > 0$，所以 $x = -1 + \sqrt{5}$。

$AC = AB = AD + x = 2 + \left(-1 + \sqrt{5}\right) = 1 + \sqrt{5}$。

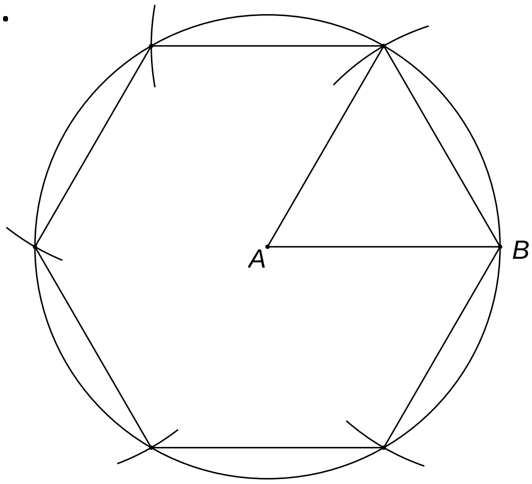
最後， $\cos 72^\circ = \dfrac{MB}{AB}$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{5}} \text{ or } \frac{\sqrt{5}-1}{4}\text{。}$$

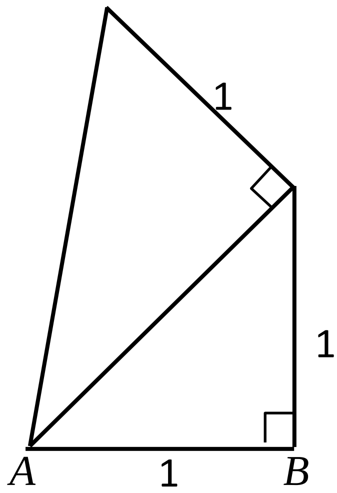
挑戰站

建議答案

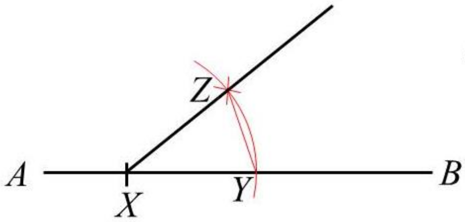
1.

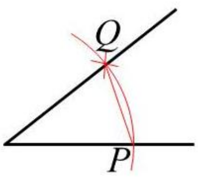


2.



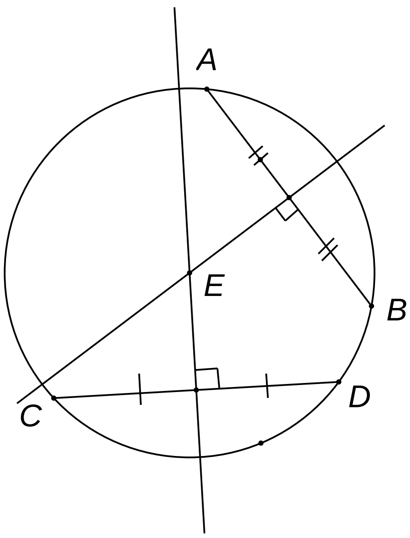
3.





4.　平分 60°

5.　任意兩弦的垂直平分線相交於圓心



6. **<u>72°角</u>**

方法一

(i) 以點 A 為圓心，AB 為半徑，畫一圓

(ii) 於點 A 作直線垂直 AB，交圓於點 C

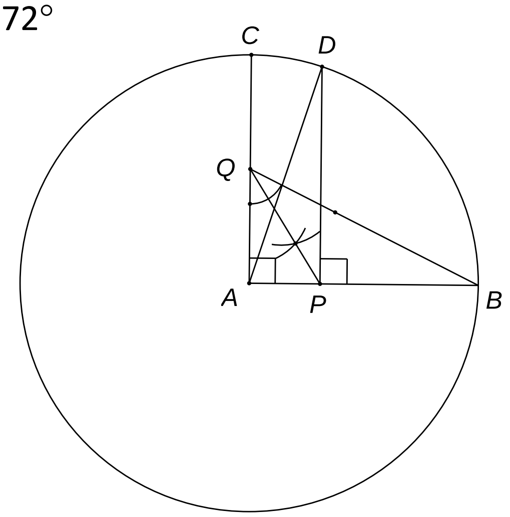
(iii) 取 AC 中點 Q

(iv) 連接 BQ

(v) 作∠BQA 的角平分線，交 AB 於點 P

(vi) 於點 P 作直線垂直 AB，交圓於點 D

(vii) 連接 DA，∠DAB = 72°



方法二

(i) 以點 A 為圓心，AB 為半徑，畫一圓

(ii) 作直徑 CAD 垂直 AB

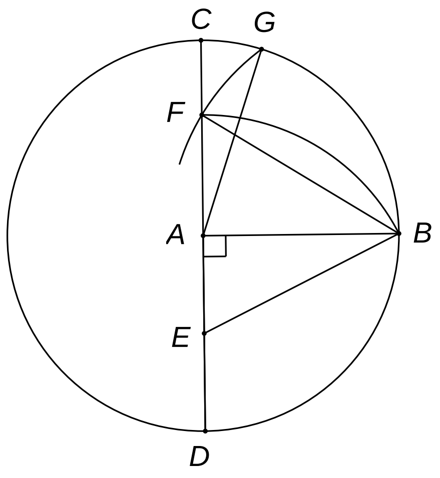
(iii) 取 AD 中點 E

(iv) 連接 BE

(v) 以點 E 為圓心，BE 為半徑作弧，交 CD 於點 F

(vi) 以點 B 為圓心，BF 為半徑作弧，交圓於點 G

(vii) 連接 AG，∠GAB = 72°



顧問老師：周平老師、黃冠榮老師、司徒庚輝老師、

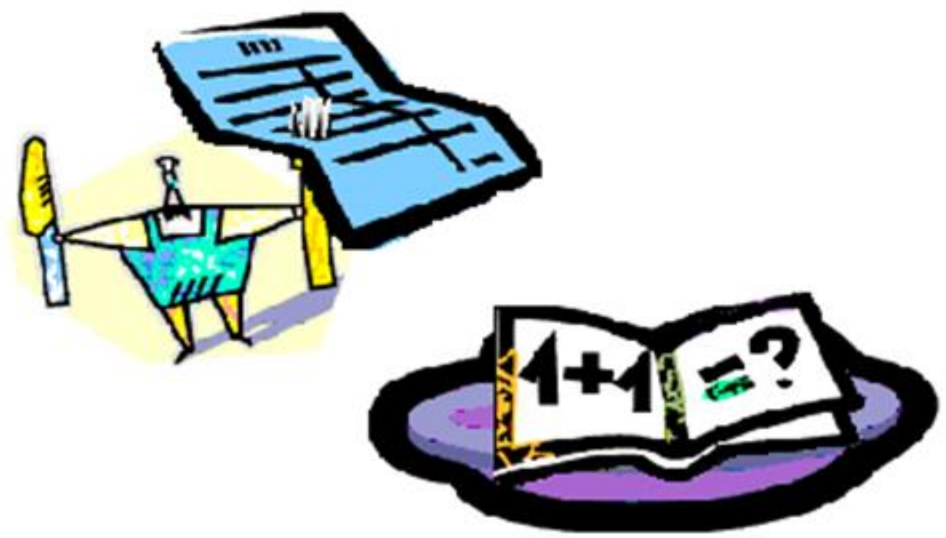
翟美綸老師、郭鳳萍老師

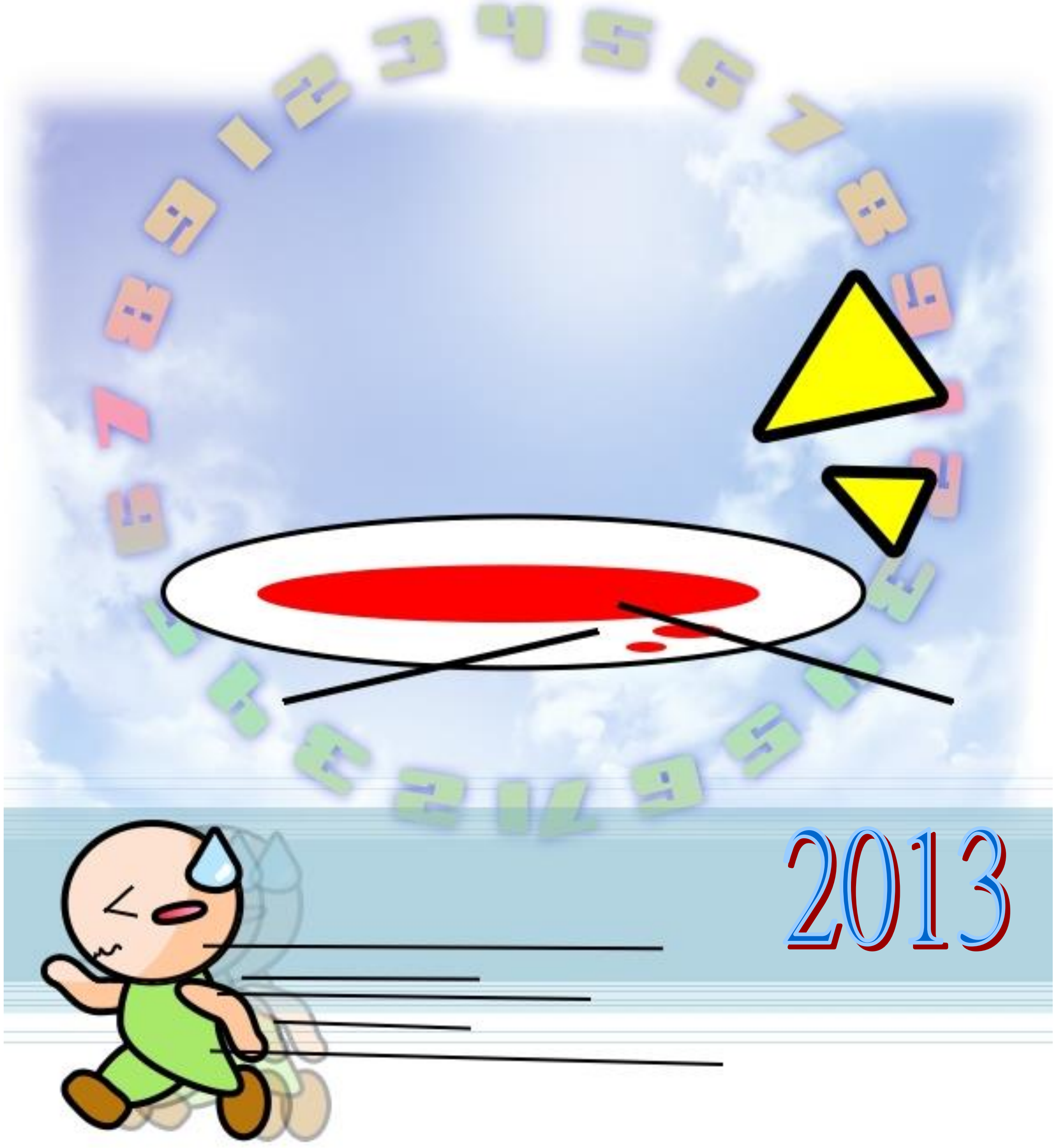
編輯：蔡育承(6A)、梁起賢(6B)、柯弦德(6B)

資料搜集：蔡育承(6A)、梁起賢(6B)、柯弦德(6B)

文字處理：梁起賢(6B)

鳴謝：曾金標(校友)、潘雪芬老師 (校對)





Tuen Mun Catholic Secondary School

Kin Sang Estate, Tuen Mun

URL: http://www.tmcss.edu.hk/tmcss/intro/subject/mat.php